

Научная статья

УДК 517.955

DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-74-92

# ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО РАВНОМЕРНО СТРОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Вахоббиддин Саидаслон угли Нурмахматов**

Новосибирский государственный университет,  
Новосибирск, Россия

v.s.nurmuhammad@gmail.com,  
v.nurmakhmatov@g.nsu.ru;https://orcid.org/0009-0001-1743-5655

## *Аннотация*

Рассматривается задача Коши для класса равномерно строго псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. В этот класс входят, в частности, уравнения Власова, Гальперна, Рэлея-Бишопа. В работе установлены энергетические оценки решения.

## *Ключевые слова и фразы*

уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, псевдогиперболические уравнения, энергетические оценки, весовые соболевские пространства.

## *Источник финансирования*

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

## *Для цитирования*

Нурмахматов В. С. Оценки решения задачи Коши для одного равномерно строго псевдогиперболического уравнения // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 74-92. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-74-92

# Estimates of solutions to the Cauchy problem for an uniformly strictly pseudohyperbolic equation

Vakhobbiddin S. Nurmakhmatov

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

v.s.nurmuhammad@gmail.com, v.nurmakhmatov@g.nsu.ru

## Abstract

We consider the Cauchy problem for a class of uniformly strictly pseudohyperbolic fourth-order equations with variable coefficients. This class includes, in particular, the Vlasov, Galpern, and Rayleigh-Bishop equations. In the work the energy estimates for the solution are established.

## Keywords

Equations not solvable with respect to the highest-order derivative, pseudohyperbolic equations, energy estimates, weighted Sobolev spaces.

## Funding

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under Agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation

## For citation

Nurmakhmatov V. S. Estimates of solutions to the Cauchy problem for an uniformly strictly pseudohyperbolic equation // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 74-92. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-74-92

## Введение

В работе рассматривается класс псевдогиперболических уравнений [1] четвертого порядка с переменными коэффициентами следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u &\equiv (aI + L_0(x; D_x)) D_t^2 u \\ &+ L_1(x; D_x) D_t u + L_2(x; D_x) u = f(t, x), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$L_1(x; D_x) = \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^1(x) D_x^\alpha, \quad L_2(x; D_x) = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha^2(x) D_x^\alpha, \quad (1.2)$$

и  $L_0(x; D_x) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^0(x) D_x^\alpha$  — эллиптический оператор. Это уравнение является не разрешенным относительно старшей производной. Впервые

систематическое изучение уравнений такого типа проводилось в работах С.Л. Соболева [2]. Поэтому в литературе уравнения вида (1.1) часто называются уравнениями соболевского типа [3, 4].

Класс уравнений (1.1) содержит, в частности, уравнение Гальперна [5], уравнение Власова [6, 7], описывающее крутильные колебания упругого стержня, уравнение Рэлея-Бишопа, возникающего в теории волноводов [8, 9], а также их многомерные аналоги.

В работах [10, 16] был рассмотрен оператор вида (2.2), коэффициенты которого достаточно мало отличались от постоянных, при этом их производные до третьего порядка включительно достаточно малы и исследовался случай, когда оператор  $L_0(D_x)$  имел постоянные коэффициенты. В этих случаях были установлены энергетические оценки. В данной работе мы рассмотрим оператор вида (2.2) в общем случае и докажем аналогичные оценки. Затем получим оценку решения задачи Коши для равномерно строго псевдогиперболических уравнений вида (1.1) в соболевском пространстве с весом.

Работа является продолжением исследований [10, 16].

## §2. Основные результаты

Напомним определение псевдогиперболических операторов с постоянными коэффициентами [1, гл. 2]

$$\mathcal{L}(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_k^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k. \quad (2.1)$$

**Определение 1.** Дифференциальный оператор (2.1) называется *псевдогиперболическим*, если его символ  $\mathcal{L}(i\eta, i\xi)$  однороден относительно некоторого вектора  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $1/\alpha_j \in N$ , т. е.

$$\mathcal{L}(c^{\alpha_0}i\eta, c^\alpha i\xi) = c\mathcal{L}(i\eta, i\xi), \quad c > 0,$$

$L_0(D_x)$  — квазиэллиптический оператор, при этом уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} (\mathcal{L}_0(i\xi))^{-1} \mathcal{L}_{l-k}(i\xi)(i\eta)^k = 0, \quad \xi \in R^n \setminus \{0\},$$

имеет только вещественные корни  $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi), \dots, \eta_l(\xi)$ . Если корни различные, то оператор называется *строго псевдогиперболическим*.

Для рассматриваемого класса операторов из (1.1)

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x) = (aI + L_0(x; D_x)) D_t^2 + L_1(x; D_x) D_t + L_2(x; D_x) \quad (2.2)$$

мы будем предполагать, что для любого  $x^0 \in R^n$  выполнена оценка

$$a_1 |\xi|^2 \geq L_0(x^0, i\xi) \geq a_0 |\xi|^2, \quad \xi \in R^n, \quad (2.3)$$

где  $a_1 \geq a_0 > 0$  — постоянные,  $a > 0$  и оператор

$$L_0(x^0; D_x) D_t^2 + L_1(x^0; D_x) D_t + L_2(x^0; D_x)$$

является строго псевдогиперболическим, т. е. уравнение

$$L_0(x^0, i\xi)(i\eta)^2 + L_1(x^0, i\xi)(i\eta) + L_2(x^0, i\xi) = 0, \quad \xi \in R^n \setminus \{0\}, \quad (2.4)$$

имеет только вещественные и различные корни  $\eta_1(x^0, \xi), \eta_2(x^0, \xi)$ . Это эквивалентно тому, что выполнено неравенство

$$d(x^0, \xi) = \left( \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^1(x^0)(\xi)^\alpha \right)^2 - 4 \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^0(x^0)(\xi)^\alpha \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha^2(x^0)(\xi)^\alpha > 0, \quad \xi \in R^n \setminus \{0\}. \quad (2.5)$$

**Определение 2.** Оператор вида (2.2) называется *равномерно строго псевдогиперболическим*, если: а) при любом  $x^0 \in R^n$  выполняется (2.5), и б) найдется константа  $\delta > 0$  такая, что при любом  $x^0 \in R^n$  имеет место неравенство

$$|\eta_1(x^0, \xi) - \eta_2(x^0, \xi)| \geq \delta |\xi|, \quad \xi \in R^n. \quad (2.6)$$

Будем предполагать, что коэффициенты  $a_\alpha^k(x) \in C^6(R^n)$ ,  $k = 0, 1, 2$  в дифференциальных операторах (1.2) постоянные вне некоторого шара  $G = \{|x| \leq r\}$ , и существует константа  $a_2 > 0$  такая, что имеет место неравенство

$$\sum_{|\beta|=4} a_\beta^2(x) \xi^\beta \geq a_2 |\xi|^4, \quad x, \xi \in R^n. \quad (2.7)$$

По определению (2.5) многочлен  $d(x^0, \xi)$  при любых  $x^0$  является однородным по  $\xi$  шестой степени, поэтому существует константа  $p > 0$  такая, что в силу (2.3), (2.5), (2.6), (2.7) независимо от  $x^0$  справедлива оценка

$$p |\xi|^6 \geq d(x^0, \xi) \geq 4a_0^2 \delta^2 |\xi|^6, \quad \xi \in R^n.$$

В дальнейшем символом  $W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$ ,  $\gamma > 0$  будем обозначать соболевское пространство с экспоненциальным весом  $e^{-\gamma t}$ , т. е. функция  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$ , если функция

$$u_\gamma(t, x) = e^{-\gamma t} u(t, x) \in W_2^{2,4}(R^{n+1}).$$

По определению положим

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})\| = \|u_\gamma(t, x), W_2^{2,4}(R^{n+1})\|.$$

Символом  $\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)$  будем обозначать преобразование Фурье функции

$$u_\gamma(t, x) \in L_2(R^{n+1}).$$

Отметим, что из [1, 12] вытекает энергетическая оценка для псевдогиперболического оператора вида (2.2) с постоянными коэффициентами. А именно, справедлива теорема.

**Теорема 1.** Для любой функции  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\gamma > 0$ , такой, что

$$D_t^2 D_x^\beta u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad |\beta| = 2, \quad (2.8)$$

имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \gamma \| (|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \\ & \leq c \| \mathcal{L}(D_t, D_x) u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \| \end{aligned} \quad (2.9)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $u(t, x)$ .

В работах [10, 16] аналогичный результат был доказан для операторов вида (2.2) с переменными коэффициентами при условии, что оператор при второй производной  $D_t^2$  имеет постоянные коэффициенты. В настоящей работе мы снимаем это требование. Будет доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Существует  $\gamma_0 > 0$  такое, что для любой функции  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$ ,  $\gamma > \gamma_0$  такой, что выполнено (2.8), имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \gamma \| (|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^{n+1}) \| \\ & \leq c \| \mathcal{L}(x; D_t, D_x) u(t, x), L_{2,\gamma}(R^{n+1}) \| \end{aligned} \quad (2.10)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $u(t, x)$ .

Оценки (2.9), (2.10) являются аналогами энергетических неравенств для строго гиперболических операторов [13], [14].

Отметим, что энергетические оценки вида (2.10) можно использовать для изучения корректности задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений с переменными коэффициентами в следующем виде

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x; D_t, D_x) u = f(t, x), & t > 0, \quad x \in R^n, \\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x). \end{cases} \quad (2.11)$$

Предположим, что существует решение задачи Коши (2.11). Тогда из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и  $f(t, x) \in W_{2,\gamma}^{1,1}(R^{n+1})$ , тогда задача Коши для равномерно строго псевдогиперболического уравнения (2.11) не может иметь более одного решения  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$ ,  $\gamma > \gamma_0$ , удовлетворяющего (2.8), при этом имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})\| + \sum_{|\alpha|=2} \|D_t^2 D_x^\beta u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ & \leq c(\gamma) \|f(t, x), W_{2,\gamma}^{1,1}(R^{n+1})\|, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $c(\gamma) > 0$  — константа, независимая от  $f(t, x)$ .

### §3. Доказательство теоремы 2

Отметим, что при получении энергетической оценки в [12] была использована схема Лере, предложенная для изучения задачи Коши для строго гиперболических уравнений [14]. Затем такой подход был развит в работах [10, 16] при получении энергетических оценок для операторов (1.1) с переменными коэффициентами, достаточно мало отличающихся от постоянных. Сейчас мы будем применять этот подход для равномерно строго псевдогиперболического оператора с произвольными гладкими коэффициентами.

Будем записывать коэффициенты дифференциальных операторов в виде

$$a_\alpha^k(x) = a_\alpha^k + a_\alpha^{k,0}(x), \quad k = 0, 1, 2,$$

где  $a_\alpha^k$  — const,  $a_\alpha^{k,0}(x) \in C_0^6(R^n)$ , при этом  $a_\alpha^{k,0}(x) \equiv 0$ ,  $|x| > r$ .

Зафиксируем некоторое малое число  $\sigma > 0$ . Степень его малости мы укажем ниже.

Выберем конечное число точек  $x^1, x^2, \dots, x^N$  из шара  $G \{x \in R^n, |x| \leq r\}$  таким образом, чтобы совокупность окрестностей

$$B(\sigma, x^k) = \{x \in R^n : |x - x^k| < \sigma\}$$

покрывала шар  $G$ , т. е.  $G \subset \bigcup_{k=1}^N B(\sigma, x^k)$ , при этом будем считать, что

$$x^{j-1} \in B(\sigma, x^j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad |x^0| > r.$$

По теореме о разбиении единицы можно построить систему функций  $\varphi_k(x) \in C_0^\infty(R^n)$ ,  $\text{supp}\varphi_k \subset B(\sigma, x^k)$ ,  $0 \leq \varphi_k(x) \leq 1$ ,  $k = 1, \dots, N$  такую, что

$$\sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \equiv 1, \quad x \in G. \quad (3.1)$$

Введем функцию

$$\varphi_0(x) = 1 - \sum_{k=1}^N \varphi_k(x), \quad x \in R^n. \quad (3.2)$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^N \varphi_k(x) \equiv 1, \quad x \in R^n. \quad (3.3)$$

Поскольку  $C_0^\infty(R^{n+1})$  всюду плотно в  $W_{2,\gamma}^{2,4}(R^{n+1})$ , то достаточно получить оценку (2.10) для любой функции  $u(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ .

В дальнейшем для сокращения записи аргументы у функций  $u(t, x)$  и  $u_\gamma(t, x)$  будем опускать.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\mathcal{M}u = -\text{Im} \int_{R^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathcal{L}(x; D_t, D_x) u \overline{e^{-\gamma t} \mathcal{L}^1(x; D_t, D_x) u} dz, \quad z = (t, x), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} e^{-\gamma t} \mathcal{L}^1(x; D_t, D_x) u &= \mathcal{L}^1(x; D_t + \gamma, D_x) u_\gamma \\ &= 2i(aI + L_0(x; D_x))(D_t + \gamma)u_\gamma + iL_1(x; D_x)u_\gamma. \end{aligned}$$

В силу определения операторов из (1.2) для сопряженных операторов  $\mathcal{L}^{1*}(x; D_t + \gamma, D_x)$ ,  $\mathcal{L}^*(x; D_t + \gamma, D_x)$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{1*}(x; D_t + \gamma, D_x) u_\gamma &= 2i(D_t - \gamma)(aI + L_0^*(x; D_x))u_\gamma + iL_1^*(x; D_x)u_\gamma, \\ &\mathcal{L}^*(x; D_t + \gamma, D_x) u_\gamma \\ &= (D_t - \gamma)^2(aI + L_0^*(x; D_x))u_\gamma - (D_t - \gamma)L_1^*(x; D_x)u_\gamma + L_2^*(x; D_x)u_\gamma. \end{aligned}$$

Для любой функции  $u(t, x) \in C_0^\infty(R^{n+1})$ , очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}u &= \int_{R^{n+1}} \frac{-1}{2i} \left( \mathcal{L}^{1*}(x; D_t + \gamma, D_x) \mathcal{L}(x; D_t + \gamma, D_x) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{L}^*(x; D_t + \gamma, D_x) \mathcal{L}^1(x; D_t + \gamma, D_x) \right) u_\gamma \overline{u_\gamma} dz. \end{aligned}$$

Обозначим подынтегральный оператор через  $\mathcal{P}(x, D_t, D_x, \gamma)$  :

$$\mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma) = \frac{-1}{2i} \left( \mathcal{L}^{1*}(x; D_t + \gamma, D_x) \mathcal{L}(x; D_t + \gamma, D_x) - \mathcal{L}^*(x; D_t + \gamma, D_x) \mathcal{L}^1(x; D_t + \gamma, D_x) \right). \quad (3.5)$$

Оператор  $\mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma)$  представляется в виде

$$\mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma) = \gamma P(x; D_t, D_x, \gamma) + p(x; D_t, D_x, \gamma), \quad (3.6)$$

где операторы

$$\begin{aligned} & P(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma \\ &= \left[ -2(D_t^2 - \gamma^2 I)(aI + L_0^*(x; D_x)) \circ (aI + L_0(x; D_x)) \right. \\ &+ ((aI + L_0^*(x; D_x)) \circ L_2(x; D_x) + L_2^*(x; D_x) \circ (aI + L_0(x; D_x))) \\ &+ D_t(L_1^*(x; D_x) \circ (aI + L_0(x; D_x)) - (aI + L_0^*(x; D_x)) \circ L_1(x; D_x)) \\ &\left. + L_1^*(x; D_x) \circ L_1(x; D_x) \right] u_\gamma, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} p(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma &= \frac{1}{2} (L_1^*(x; D_x) \circ L_2(x; D_x) + L_2^*(x; D_x) \circ L_1(x; D_x)) u_\gamma \\ &+ \frac{1}{2} (D_t^2 + \gamma^2 I) \left[ L_1^*(x; D_x) \circ (aI + L_0(x; D_x)) + (aI + L_0^*(x; D_x)) \circ L_1(x; D_x) \right] u_\gamma \\ &- D_t((aI + L_0^*(x; D_x)) \circ L_2(x; D_x) - L_2^*(x; D_x) \circ (aI + L_0(x; D_x))) u_\gamma \\ &- (D_t^2 - \gamma^2 I) \left( ((aI + L_0^*(x; D_x)) \circ L_1(x; D_x) + L_1^*(x; D_x) \circ (aI + L_0(x; D_x))) \right) u_\gamma. \end{aligned}$$

По определению дифференциальных операторов из (1.2) и теореме о коммутаторе [15] легко видеть, что операторы  $P(x; D_t, D_x, \gamma)$  и  $p(x; D_t, D_x, \gamma)$  имеют 6-ой порядок. Тогда учитывая гладкость коэффициентов, оператор  $p(x; D_t, D_x, \gamma)$  представляется в виде

$$\begin{aligned} p(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma &= D_t^2 \sum_{|\beta| \leq 4} b_\beta^0(x) D_x^\beta u_\gamma + \gamma^2 \sum_{|\beta| \leq 4} b_\beta^1(x) D_x^\beta u_\gamma \\ &+ D_t \sum_{|\beta| \leq 5} b_\beta^2(x) D_x^\beta u_\gamma + \sum_{|\beta| \leq 6} b_\beta^3(x) D_x^\beta u_\gamma, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где гладкие функции  $b_\beta^j(x)$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , постоянные при  $|x| \geq r + 1$ .

В работах [10, 16] для символа  $P(x^0, i\eta, i\xi, \gamma)$  оператора  $P(x^0; D_t, D_x, \gamma)$  при  $x^0 \in R^n$ , получена следующая оценка

$$P(x^0, \eta, \xi, \gamma) \geq \rho(\delta)(a + |\xi|^2)^2(\eta + \gamma + |\xi|)^2, \quad (3.9)$$

где  $\rho(\delta) > 0$  — константа, не зависящая от  $\gamma$  и  $x^0$ .

Учитывая (3.6) и (3.7), перепишем форму (3.4) в виде

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}u \\ = & \gamma \left[ 2 \int_{R^{n+1}} (D_t + \gamma I)(aI + L_0(x; D_x))u_\gamma \overline{(D_t + \gamma I)(aI + L_0(x; D_x))u_\gamma} dz \right. \\ & + \int_{R^{n+1}} L_2(x; D_x)u_\gamma \overline{(aI + L_0(x; D_x))u_\gamma} dz \\ & + \int_{R^{n+1}} (aI + L_0(x; D_x))u_\gamma \overline{L_2(x; D_x)u_\gamma} dz \\ & + \int_{R^{n+1}} D_t(aI + L_0(x; D_x))u_\gamma \overline{L_1(x; D_x)u_\gamma} dz \\ & + \int_{R^{n+1}} L_1(x; D_x)u_\gamma \overline{D_t(aI + L_0(x; D_x))u_\gamma} dz \\ & \left. + \int_{R^{n+1}} L_1(x; D_x)u_\gamma \overline{L_1(x; D_x)u_\gamma} dz \right] + \int_{R^{n+1}} p(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma \overline{u_\gamma} dz. \end{aligned}$$

Используя (3.1)–(3.3), можно представить все операторы в виде

$$\begin{aligned} L_m(x; D_x)u_\gamma &= \sum_{k=0}^N L_m(x, x^k; D_x)(\varphi_k(x)u_\gamma) \\ &+ \sum_{k=0}^N L_m(x^k; D_x)(\varphi_k(x)u_\gamma), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} L_m(x, x^k; D_x)u_\gamma &= \sum_{|\alpha|=2+m} (a_\alpha^m(x) - a_\alpha^m(x^k))D_x^\alpha(\varphi_k(x)u_\gamma), \\ L_m(x^k; D_x)u_\gamma &= \sum_{|\alpha|=2+m} a_\alpha^m(x^k)D_x^\alpha(\varphi_k(x)u_\gamma), \quad m = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отсюда и из (3.1)–(3.3), (3.10)–(3.11) выражение для  $\mathcal{M}u$ , перепишем в виде

$$\mathcal{M}u = \gamma \left[ P_0u + P_1u + P_2u + P_3u \right] + P_4u, \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} P_0u &= \sum_{k,j=0}^N 2 \int_{R^{n+1}} (D_t + \gamma I)(aI + L_0(x^k; D_x))(\varphi_k u_\gamma) \\ &\quad \times \overline{(D_t + \gamma I)(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &+ \int_{R^{n+1}} (aI + L_0(x^k; D_x))(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_2(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &+ \int_{R^{n+1}} L_2(x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &+ \int_{R^{n+1}} D_t(aI + L_0(x^k; D_x))(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_1(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &+ \int_{R^{n+1}} L_1(x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{D_t(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &\quad + \int_{R^{n+1}} L_1(x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_1(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz, \\ P_1u &= \sum_{k,j=0}^N 2 \int_{R^{n+1}} (D_t + \gamma I)L_0(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \\ &\quad \times \overline{(D_t + \gamma I)(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &+ \int_{R^{n+1}} L_0(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_2(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &+ \int_{R^{n+1}} L_2(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &+ \int_{R^{n+1}} D_t L_0(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_1(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &+ \int_{R^{n+1}} L_1(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{D_t(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)} dz \\ &\quad + \int_{R^{n+1}} L_1(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_1(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 u &= \sum_{k,j=1}^N 2 \int_{R^{n+1}} (D_t + \gamma I)(aI + L_0(x^k; D_x))(\varphi_k u_\gamma) \\
&\quad \times \overline{(D_t + \gamma I)L_0(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&+ \int_{R^{n+1}} (aI + L_0(x^k; D_x))(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_2(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&\quad + \int_{R^{n+1}} L_2(x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_0(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&+ \int_{R^{n+1}} D_t(aI + L_0(x^k; D_x))(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_1(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&\quad + \int_{R^{n+1}} L_1(x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{D_t L_0(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&\quad + \int_{R^{n+1}} L_1(x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_1(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz, \\
P_3 u &= \sum_{k,j=1}^N 2 \int_{R^{n+1}} (D_t + \gamma I)L_0(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \\
&\quad \times \overline{(D_t + \gamma I)L_0(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&\quad + \int_{R^{n+1}} L_0(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_2(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&\quad + \int_{R^{n+1}} L_2(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_0(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&+ \int_{R^{n+1}} D_t(aI + L_0(x, x^k; D_x))(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_1(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&\quad + \int_{R^{n+1}} L_1(x, x^j; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{D_t(aI + L_0(x, x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)} dz \\
&\quad + \int_{R^{n+1}} L_1(x, x^k; D_x)(\varphi_k u_\gamma) \overline{L_1(x, x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)} dz, \\
P_4 u &= \int_{R^{n+1}} p(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma \overline{u_\gamma} dz.
\end{aligned}$$

Теперь оценим каждое слагаемое в (3.12). Коэффициенты дифференциальных операторов в форме  $P_0 u$  постоянные, поэтому применяя теорему

Планшереля, эту форму можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 P_0 u = & \sum_{k,j=1}^N \int_{R^{n+1}} \left[ 2(\eta^2 + \gamma^2)(a - L_0(x^k, \xi))(a - L_0(x^j, \xi)) \right. \\
 & + (a - L_0(x^k, \xi))L_2(x^j, \xi) + L_2(x^k, \xi)(a - L_0(x^j, \xi)) \\
 & - \eta(a - L_0(x^k, \xi))L_1(x^j, \xi) - L_1(x^k, \xi)\eta(a - L_0(x^j, \xi)) \\
 & \left. + L_1(x^k, \xi)L_1(x^j, \xi) \right] F[\varphi_k u_\gamma](\eta, \xi) \overline{F[\varphi_j u_\gamma](\eta, \xi)} d\zeta, \quad \zeta = (\eta, \xi).
 \end{aligned}$$

Обозначим через  $P_0(x^k, x^j, \eta, \xi, \gamma)$  — выражение в квадратных скобках. Представим символ  $P_0(x^k, x^j, \eta, \xi, \gamma)$  в виде суммы символа  $P(x^k, \eta, \xi, \gamma)$  оператора  $P(x^k; D_t, D_x, \gamma)$  в фиксированной точке  $x^k$  и некоторых полиномов  $P_{0,1}(x^k, x^j, \eta, \xi, \gamma)$ , а именно

$$P_0(x^k, x^j, \eta, \xi, \gamma) = P(x^k, \eta, \xi, \gamma) + P_{0,1}(x^k, x^j, \eta, \xi, \gamma),$$

где

$$\begin{aligned}
 P_{0,1}(x^k, x^j, \eta, \xi, \gamma) = & 2(\eta^2 + \gamma^2)(a - L_0(x^k, \xi))(L_0(x^k, \xi) - L_0(x^j, \xi)) \\
 & - (a - L_0(x^k, \xi))(L_2(x^k, \xi) - L_2(x^j, \xi)) \\
 & + (L_2(x^k, \xi) - \eta L_1(x^k, \xi))(L_0(x^k, \xi) - L_0(x^j, \xi)) \\
 & + (\eta(a - L_0(x^k, \xi)) + L_1(x^k, \xi))(L_1(x^k, \xi) - L_1(x^j, \xi)).
 \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$P_0 u = P u + P_{0,1} u, \tag{3.13}$$

где

$$\begin{aligned}
 P u = & \sum_{k,j=1}^N \int_{R^{n+1}} P(x^k, \eta, \xi, \gamma) F[\varphi_k u_\gamma](\eta, \xi) \overline{F[\varphi_j u_\gamma](\eta, \xi)} d\zeta, \\
 P_{0,1} u = & \sum_{k,j=1}^N \int_{R^{n+1}} P_{0,1}(x^k, \eta, \xi, \gamma) F[\varphi_k u_\gamma](\eta, \xi) \overline{F[\varphi_j u_\gamma](\eta, \xi)} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Из оценки (3.9), следует

$$|P u| \geq \rho(\delta) \int_{R^{n+1}} (a + |\xi|^2)^2 (\eta + \gamma + |\xi|)^2 |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta. \tag{3.14}$$

Теперь оценим  $P_{0,1} u$ . Напомним, что  $x^{j-1} \in B(\sigma, x^j)$  и  $|x^0| > r$ . Перепишем

теперь символ  $P_{0,1}(x^k, x^j, \eta, \xi, \gamma)$  следующим образом

$$\begin{aligned} P_{0,1}(x^k, x^j, \eta, \xi, \gamma) &= \left( 2(\eta^2 + \gamma^2)(a - L_0(x^k, \xi)) + L_2(x^k, \xi) - \eta L_1(x^k; \xi) \right) \\ &\quad \times \sum_{|\alpha|=2} \sum_{j=1}^k (a_\alpha^0(x^j) - a_\alpha^0(x^{j-1})) \xi^\alpha \\ &\quad - (a - L_0(x^k, \xi)) \sum_{|\alpha|=4} \sum_{j=1}^k (a_\alpha^2(x^j) - a_\alpha^2(x^{j-1})) \xi^\alpha \\ &\quad + (\eta(a - L_0(x^k, \xi)) + L_1(x^k; \xi)) \sum_{|\alpha|=3} \sum_{j=1}^k (a_\alpha^1(x^j) - a_\alpha^1(x^{j-1})) \xi^\alpha. \end{aligned}$$

Учитывая гладкость коэффициентов и условие (2.3), будем теперь предполагать, что число  $\sigma > 0$  нами выбирается таким образом, что

$$\sum_{|\alpha|=2+m} \sum_{j=1}^N |a_\alpha^m(x^j) - a_\alpha^m(x^{j-1})| < \frac{a_0 \rho(\delta)}{q}, \quad q \geq 1, \quad (3.15)$$

$m = 0, 1, 2$ , при  $|x^j - x^{j-1}| < \sigma$ , где  $\rho(\delta)$  определено в (3.9). Дополнительное условие на  $q \geq 1$  будет указано ниже. Тогда в силу условия (3.15) для модуля формы  $P_{0,1}u$ , имеем

$$|P_{0,1}u| \leq \frac{c_1 a_0 \rho(\delta)}{q} \int_{R^{n+1}} (a + |\xi|^2)^2 (|\eta| + \gamma + |\xi|)^2 |\hat{u}(\eta, \xi)|^2 d\zeta, \quad (3.16)$$

где  $c_1 > 0$  — константа, независимая от  $\gamma$ .

Теперь учитывая финитность функции  $\varphi_k(x)$ , будем оценивать модуль формы  $P_1u$ :

$$\begin{aligned} |P_1u| &\leq \sum_{j=0}^N \int_R \sum_{k=1}^N \int_{B(\sigma, x^k)} \left( 2|(D_t + \gamma I)| \sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x^k)| |D_x^\alpha(\varphi_k u_\gamma)| \right. \\ &\quad \times \overline{|(D_t + \gamma I)(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)|} \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x^k)| |D_x^\alpha(\varphi_k u_\gamma)| \overline{|L_2(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)|} \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=4} |a_\alpha^2(x) - a_\alpha^2(x^k)| |D_x^\alpha(\varphi_k u_\gamma)| \overline{|(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)|} \\ &\quad \left. + \sum_{|\alpha|=2} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x^k)| |D_t D_x^\alpha(\varphi_k u_\gamma)| \overline{|L_1(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)|} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{|\alpha|=3} |a_\alpha^1(x) - a_\alpha^1(x^k)| |D_x^\alpha(\varphi_k u_\gamma)| \overline{|D_t(aI + L_0(x^j; D_x))(\varphi_j u_\gamma)|} \\
 & + \sum_{|\alpha|=3} |a_\alpha^1(x) - a_\alpha^1(x^k)| |D_x^\alpha(\varphi_k u_\gamma)| \overline{|L_1(x^j; D_x)(\varphi_j u_\gamma)|} \Big) dz.
 \end{aligned}$$

Учитывая условие (3.15), и применяя теорему Планшереля, имеем

$$\begin{aligned}
 |P_1 u| & \leq \frac{a_0 \rho(\delta)}{q} \sum_{k,j=0}^N \int_{R^{n+1}} \left( 2|(i\eta + \gamma)| \sum_{|\alpha|=2} |\xi^\alpha| \overline{|(a + L_0(x^j; \xi))|} \right. \\
 & + \sum_{|\alpha|=2} |\xi^\alpha| \overline{|L_2(x^j; \xi)|} + \sum_{|\alpha|=4} |\xi^\alpha| \overline{|(a + L_0(x^j; \xi))|} + \sum_{|\alpha|=2} |\eta \xi^\alpha| \overline{|L_1(x^j; \xi)|} \\
 & \left. + \sum_{|\alpha|=3} |\xi^\alpha| \overline{|\eta(a + L_0(x^j; \xi))|} + \sum_{|\alpha|=3} |\xi^\alpha| \overline{|L_1(x^j; \xi)|} \right) |F(\varphi_k u_\gamma) \overline{F(\varphi_j u_\gamma)}| d\zeta.
 \end{aligned}$$

В силу свойства преобразования Фурье имеем

$$\begin{aligned}
 |P_1 u| & \leq \frac{c_2 a_0 \rho(\delta)}{q} \int_{R^{n+1}} \left( (\eta^2 + \gamma^2) |\xi|^2 (a + a_1 |\xi|)^2 \right. \\
 & \left. + |\xi|^4 (a + a_1 |\xi|^2) + |\eta| |\xi|^5 + |\eta| |\xi|^3 (a + a_1 |\xi|^2) + |\xi|^6 \right) |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta,
 \end{aligned}$$

где константа  $c_2 > 0$  — не зависит от  $\gamma$ . Отсюда

$$|P_1 u| \leq \frac{c_3 a_0 \rho(\delta)}{q} \int_{R^{n+1}} (|\eta| + \gamma + |\xi|)^2 (a + |\xi|)^2 |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta, \quad (3.17)$$

где константа  $c_3$  не зависит от  $\gamma$ .

Аналогично получим оценки для форм  $P_2 u$ ,  $P_3 u$ ,

$$|P_2 u| \leq \frac{c_4 a_0 \rho(\delta)}{q} \int_{R^{n+1}} (|\eta| + \gamma + |\xi|)^2 (a + |\xi|)^2 |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta, \quad (3.18)$$

$$|P_3 u| \leq \frac{c_5 a_0 \rho(\delta)}{q} \int_{R^{n+1}} (|\eta| + \gamma + |\xi|)^2 (a + |\xi|)^2 |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta, \quad (3.19)$$

где константы  $c_4, c_5$  не зависят от  $\gamma$ .

Учитывая представления (3.8), получим

$$|P_4 u| \leq c_6 \int_{R^{n+1}} (|\eta| + \gamma + |\xi|)^2 (a + |\xi|)^2 |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta, \quad (3.20)$$

где константа  $c_6$  не зависит от  $\gamma$ .

Оценим теперь форму  $\mathcal{M}u$ . В силу (3.12) и (3.13) имеем

$$|\mathcal{M}u| \geq \gamma \left( |Pu| - |P_{0,1}u| - |P_1u| - |P_2u| - |P_3u| - \frac{1}{\gamma} |P_4| \right).$$

В силу полученных оценок (3.14), (3.16), (3.17)–(3.20) следует

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}u| &\geq \gamma \left( \rho(\delta) - \frac{a_0 \rho(\delta)}{q} (c_1 + c_3 + c_4 + c_5) - \frac{c_6}{\gamma} \right) \\ &\times \int_{R^{n+1}} (|\eta| + \gamma + |\xi|)^2 (a + |\xi|)^2 |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Определим число  $\gamma_0 = \frac{4c_6}{\rho(\delta)}$ , и для константы  $q$  из (3.15) будем считать, что  $q \geq 4a_0(c_1 + c_3 + c_4 + c_5)$ . Тогда при  $\gamma > \gamma_0$  имеет место оценка

$$\mathcal{M}u \geq \gamma \frac{\rho(\delta)}{2} \|(a + |\xi|^2)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^{n+1})\|^2.$$

Отсюда в силу определения  $Mu$  по неравенству Гёльдера, получим энергетическую оценку (2.10).

Теорема 2 доказана.

#### §4. Доказательство теоремы 3

Очевидно, что при подстановке  $D_t u$  вместо  $u$  в форму (3.4), и учитывая оценку (2.10), получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \gamma \|( |\eta| + \gamma)(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \\ \leq c_1 (\| D_t f(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \|), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $c_1 > 0$  - константа, не зависящая от  $f(t, x)$  и  $\gamma$ . Для получения оценки:

$$\begin{aligned} \gamma \|( |\xi|)(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \\ \leq c_2 (\| \nabla_x f(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \|), \end{aligned} \quad (4.2)$$

с константой  $c_2 > 0$ , не зависящей от  $f(t, x)$  и  $\gamma$ , вместо формы (3.4) рассмотрим

$$\mathcal{M}_1 u = \text{Im} \int_{R^{n+1}} e^{-\gamma t} \Delta \mathcal{L}(x; D_t, D_x) u(t, x) \overline{e^{-\gamma t} \mathcal{L}^1(x; D_t, D_x) u(t, x)} dz.$$

Затем, повторяя предыдущие рассуждения получим (4.2). Из оценок (4.1) и (4.2) вытекает (2.12).

Замечание. Аналогичным образом можно получить оценку производных более высокого порядка.

Автор выразит благодарность профессору Г. В. Демиденко за постановку задачи, обсуждения и советы.

### Список литературы

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Соболев С. Л. Избранные труды. Том. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы (ред. Г. В. Демиденко, В. Л. Васкевич.). Новосибирск: Изд - во ин - та математики, филиал "Гео"изд-ва СО РАН, 2003.
3. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Koln: VSP, 2003.
4. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*. М.: Физматлит, 2007.
5. Гальперн С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными (автореферат докторской диссертации) // *Успехи мат. наук*. 1963. Т. 18, № 2. С. 239 - 249.
6. Власов В. З. *Тонкостенные упругие стержни*. Москва - Ленинград: Стройиздат, 1940.
7. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. *Задачи волновой динамики элементов конструкций*. Саров: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
8. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams // *Aeronautical Quarterly*. 1952. V. 3, N. 4. P. 280-293.
9. Rao J. S. *Advanced Theory of Vibration*. New York, John Wiley and Sons, 1992.

10. Демиденко Г. В. Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2024. Т. 64. № 8. С. 1466–1475.
11. Fedotov I., Shatalov M., Marais J. Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibrations // *Acta Mechanica*. 2016. V. 227, N, 11. P. 3315 - 3324.
12. Демиденко Г. В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // *Сиб. мат. журн.* 2015. Т. 56. № 6. С. 1289 - 1303.
13. Петровский И. Г. *Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия*. М: Наука, 1986.
14. Лере Ж. *Гиперболические дифференциальные уравнения*. М: Наука, 1984.
15. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частным производными. Т. III*. М: Мир, 1987.
16. Демиденко Г. В., Нурмахматов В. С. Энергетические оценки для одного равномерно строго псевдогиперболического оператора // *Челяб. физ-мат. журн.* 2025. Т. 10. № 4. С. 649 - 663.

## References

1. Demidenko G. V., Uspenskii S. V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable With Respect to the Highest - Order Derivative*. New York: Marcel Dekker Inc, 2003 [in English].
2. Sobolev S. L. *Selected works, vol. 1: Equations of mathematical physics, computational mathematics, and cubature formulas* ( eds. G. V. Demidenko, V. L. Vaskevich). New York: Springer, 2006.
3. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Utrecht, Boston, Koln: VSP, 2003.
4. Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Yu. D. *Linear and nonlinear equations of Sobolev type*. Moscow: Fizmatlit, 2007 (In Russ.).
5. Galpern S. A. The Cauchy problem for the general systems of linear partial differential equations. *Uspekhi Mat. Nauk* // 1963. V. 18, N, 2. P. 239 - 249 (in Russian).

6. Vlasov V. Z. *Thin - Walled Elastic Beams*. Washington, D. C : National Science Foundation, 1961.
7. Gerasimov S. I., Erofeev V. I. *Problems of Wave Dynamics of Structural Elements*. Sarov: RFNC - VNIIEF, 2014.
8. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams // *Aeronautical Quarterly*. 1952. V. 3, N, 4. P. 280 - 293.
9. Rao J. S. *Advanced Theory of Vibration*. New York: John Wiley and Sons, 1992.
10. Demidenko G. V. Energy estimates for one class of pseudohyperbolic operators with variable coefficients // *Comput. Math. Math. Phys.* 2024. V. 64, N, 8. P. 1755 - 1764.
11. Fedotov I., Shatalov M., Marais J. Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibrations // *Acta Mechanica*. 2016. V. 227, N, 11. P. 3315 - 3324.
12. Demidenko G. V. Solvability conditions of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic equations // *Sib. Math. J.*, 2015. V.56, N, 6. P.1028 - 1041.
13. Petrovskiy I. G. *Selected works. Systems of partial differential equations. Algebraic geometry*. Moscow: Nauka, 1986 (In Russian).
14. Leray J. *Hyperbolic Differential Equations*. Princeton: Institute for Advanced Study, 1953.
15. Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. III*. Berlin etc.: Springer - Verlag, 1985.
16. Demidenko G. V., Nurmakhmatov V. S. Energy estimates for an uniformly strictly pseudohyperbolic operator // *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal* 2025. V.10, N, 4. P. 649 - 663.

### Информация об авторе

Вахоббиддин Саидаслон угли Нурмахматов, аспирант

SPIN 6135-1178 AuthorID: 1231586

Scopus Author ID 57369669000

Web of Science ResearcherID: JYP-3805-2024

### Author Information

Vakhobiddin S. Nurmakhmatov, postgraduate student

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)

Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 74-92

Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 74-92

SPIN 6135-1178 AuthorID: 1231586  
Scopus Author ID 57369669000  
Web of Science ResearcherID: JYP-3805-2024

*Статья поступила в редакцию 09.01.2026;  
одобрена после рецензирования 17.04.2026; принята к публикации  
06.05.2026*

*The article was submitted 09.01.2026;  
approved after reviewing 17.04.2026; accepted for publication 06.05.2026*